УРАВНЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ МНОГОЦИЛИНДРОВОГО ДВИГАТЕЛЯ

Г.Ш. Лев, А.В.Фролов

Для определения уравнения частот крутильных колебаний многоцилиндрового двигателя возможна следующая постановка задачи. Кривошипно-шатунный механизм двигателя заменяется цилиндрическим валом, не имеющим массы, на который насажено несколько дисков. Моменты инерции этих условных дисков определяются из требований, чтобы диски были динамически эквивалентны массам отрезкам вала и массам частей, движущихся возвратно-поступательно.

Рассмотрим вал постоянного поперечного сечения, на который насажены n одинаковых дисков, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Жесткость на кручение каждой части вала между двумя дисками характеризуется константой c так, что если относительное угловое смещение двух соседних дисков равно θ, то момент кручения этой части вала равен $c\theta$.

Пусть θ_x - угловое смещение x-го диска. Тогда уравнение движения этого диска будет

$$I \cdot \frac{d^2\theta_x}{dt^2} = c(\theta_{x-1} - \theta_x) - c(\theta_x - \theta_{x+1}).$$

Предполагая движение гармоническим с амплитудой $\theta_x^\star$ и угловой частотой ω, $\theta_x = \theta_x^\star \sin \omega t$, получаем

$$I\omega^2\theta_x^\star + c(\theta_{x-1}^\star + \theta_{x+1}^\star - 2\theta_x^\star) = 0,$$

или, обозначая $\alpha^2 = \frac{I\omega^2}{c}$,

$$\theta_{x-1}^\star - (2 - \alpha^2)\theta_x^\star + \theta_{x+1}^\star = 0.(1)$$

Разностное уравнение (1) не применимо к первому и последнему дискам, но справедливо для $x = 2, 3, \ldots, n-1$. Пусть $\theta_x^\star = e^{\lambda x}$, получим

$$e^{-\lambda} - (2 - \alpha^2) + e^{\lambda} = 0$$

или

$$ch\lambda = 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Здесь возможны три случая:

1. $|\alpha| < 2$, $|ch\lambda| < 1$ и λ - чисто мнимое число. Если $\lambda = \mu \cdot i$, то соответствующее решение уравнения (1) имеет вид
$$\theta_x^\star = Acos\mu x + Bsin\mu x;$$
2. $|\alpha| > 2$; при $\lambda = \mu + i \cdot \nu$ то соответствующее решение уравнения (1) имеет вид
$$\theta_x^\star = A(-1)^x e^{\mu x} + B(-1)^x e^{-\mu x};$$
3. $|\alpha| = 2$; уравнение (1) преобразуется в уравнение
$$\theta_{x-1}^\star - 2\theta_x^\star + \theta_{x+1}^\star = 0,$$
частными решениями которого будут $(-1)^x$ и $(-1)^x x$.

Пусть $K_0(\omega) = K_0 = I - \frac{k_0}{I_0 \omega^2}$ - динамическая константа упругости вала, обладающая следующими свойствами:

$$\lim_{\omega \to\ 0+0} K_0 = 0,$$
$$\lim_{\omega \to\ \omega_0 - 0} K_0 = -\infty,$$
$$\lim_{\omega \to\ \omega_0 + 0} K_0 = +\infty,$$
$$\lim_{\omega \to\ +\infty} K_0 = k_0,$$

где k_0 - статическая константа упругости вала, $\omega_0 = \left(\frac{k_0}{I_0}\right)^{0,5}$.

Для первого случая уравнения (1)получена следующая теорема существования решения.

Теорема 1. Случай (1) уравнения (1) допускает существование нетривиальных решений, если для A и B справедлива система уравнений
$$A\left[1 + \left(\frac{K_0}{c} - 1\right) cos\mu\right] + B\left(\frac{K_0}{c} - 1\right) sin\mu = 0,$$
$$A\left[cos\mu(n+1) + \left(\frac{K_{n+1}}{c} - 1\right) cos\mu n\right] + B\left[sin\mu(n+1) + \left(\frac{K_{n+1}}{c} - 1\right) sin\mu n\right] = 0$$
и выполняется равенство
$$sin\mu(n+1) + \left[\left(\frac{K_0}{c} + \frac{K_{n+1}}{c}\right) sin\mu n + \left(\frac{K_0}{c} - 1\right)\left(\frac{K_{n+1}}{c} - 1\right) sin\mu(n-1)\right] = 0.$$

Допуская, что вал простирается неограниченно от 0 до ∞ и что конец его в точке $x = 0$ совершает угловые колебания, колеблясь по закону $\theta_0 = \theta^\star \sin \omega t$, тогда, полагая при этом, что все диски колеблются с частотой ω, но с неизвестными амплитудами и фазами, для углового отклонения x-го диска получим

$$\theta_x = \theta_x^\star \sin \omega t + \theta_x^{\star\star} \cos \omega t.$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение (1), можно установить, что величины $\theta_x^\star$ и $\theta_x^{\star\star}$ одновременно удовлетворяют уравнению

$$\theta_{x-1}^\star - (2 - \alpha^2)\theta_x^\star + \theta_{x+1}^\star = 0.$$

Таким образом, случай (1) выражается уравнением бегущей волны, скорость распространения которой равна

$$\omega = 2l\sqrt{\frac{c}{I}} \cdot \frac{sin\frac{\mu}{2}}{\mu},$$

где l - расстояние между дисками вала.

Список литературы

[1] Агошков В.И. *Методы решения задач математической физики* // В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутяев. Под ред. Г.И. Марчука. М.: Физматлит - 2002, 320 стр.

Лев Герш Шахнович **Адрес:** Россия, 656099, Барнаул, пр. Ленина, 46, АлтГТУ **тел.:** (3852)29–08–65, **e-mail:** vmmm@smtp.ru

Фролов Антон Викторович **Адрес:** Россия, 656099, Барнаул, пр. Ленина, 46, АлтГТУ **тел.:** (3852)29–08–65, **e-mail:** vmmm@smtp.ru